国民收入Y(第 3 章)

总量生产函数的定义

K：生产中使用的资本品的数量

L：生产中使用的劳动力的数量

生产函数$F(K,L)$：给定投入品向量(K,L)，所能实现的最大产出为$F(K,L)$

总量生产函数的特征：规模收益不变

生产规模（所有投入品的数量）同比例变化，产量以相同比例变化。

设z为任意正数，对所有的(K,L)，

$$F(zK,zL)\equiv zF(K,L)$$

边际产出

资本品的边际产出（Marginal Product of Capital；缩写为MPK）：在其他因素（生产活动中雇佣的劳动力的数量）保持不变时，增加一件资本品所增加的产出。这个指标衡量资本品的生产率。

$$MPK(K,L)\equiv\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$$

劳动力的边际产出:增加一个劳动力所增加的产出,衡量劳动力的生产率。

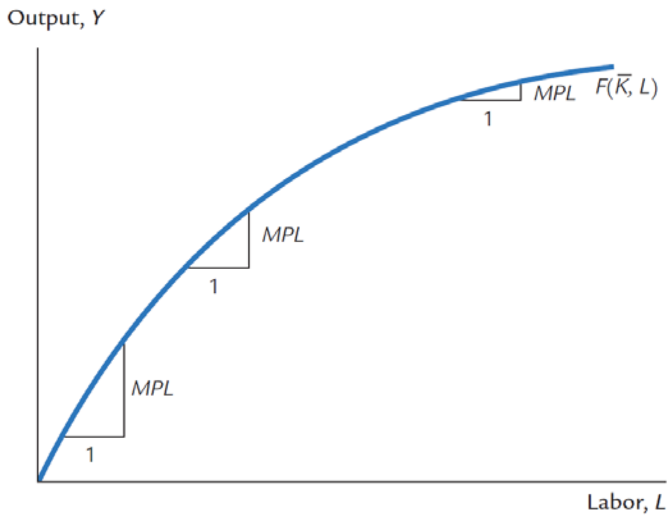
$$MPL(K,L)\equiv\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$$

边际产出递减规律

保持劳动力数量（资本品数量）不变，在生产过程中不断增加资本品数量（劳动力数量），资本品的边际产出最终递减。

$$\frac{\partial MPK}{\partial K}(K,L)<0$$

$$\frac{\partial MPL}{\partial L}(K,L)<0$$



欧拉定理

对规模收益不变的生产函数，应用欧拉定理，得到

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L= F(K,L)$$

整理得到

$$MPK(K,L)\times K+MPL(K,L)\times L= F(K,L)$$

就是说，

$$\text{产量}\left(\text{收入}\right)$$

$$=\text{资本品的边际产出}\times\text{资本品的数量}$$

$$+\text{劳动力的边际产出}\times\text{劳动力的数量}$$

~~设z为任意正数，则在生产函数具有规模收益不变特征时，对所有的(K,L)，~~

$$\cancel{F(zK,zL)\equiv zF(K,L)}$$

~~恒等号两边的项对z求导，对所有的正数z，~~

$$\cancel{\frac{\partial F(zK,zL)}{\partial K}\frac{dzK}{dz}+\frac{\partial F(zK,zL)}{\partial L}\frac{dzL}{dz}= F(K,L)}$$

~~因为这个等式对所有的正数z成立，对$z=1$自然成立，因此，~~

$$\cancel{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L= F(K,L)}$$

~~整理得到~~

$$\cancel{MPK(K,L)\times K+MPL(K,L)\times L= F(K,L)}$$

竞争经济中企业的利润最大化问题

在竞争经济中，实际工资率等于劳动力的边际产出（生产率）；资本品的实际租赁价格等于资本品的边际产出。就是说，

$$MPL(K,L)=\frac{w}{p},\quad MPK(K,L)=\frac{r}{p}$$

设一般物价水平为p，劳动力的货币工资率为w，资本品的货币租赁价格为R。利润最大化问题：

$$\max_{K,L} pF(K,L)-RK-wL$$

设资本品和劳动力的最优雇用量为(K,L)，它满足一阶条件：

$$MPK(K,L)=\frac{R}{p}$$

$$MPL(K,L)=\frac{w}{p}$$

其中，$\frac{R}{p}$是实际租赁价格；$\frac{w}{p}$是实际工资。

按生产要素的贡献分配收入

根据欧拉定理，

$$MPK(K,L)\times K+MPL(K,L)\times L= F(K,L)$$

根据利润最大化问题的解的特征，

$$MPL(K,L)=\frac{w}{p},\quad MPK(K,L)=\frac{r}{p}$$

我们得到

$$F(K,L)=MPK(K,L)\times K+MPL(K,L)\times L$$
$$=\frac{r}{p}\times K+\frac{w}{p}\times L$$

$=$ 资本品的租赁价格 $\times$ 资本品数量 $+$ 劳动力的工资率 $\times$ 劳动力数量

$=$ 资本的全部收入 $+$ 劳动力的全部收入

整理得到，

$$1$$
$$=\frac{\text{资本品的租赁价格}\times\text{资本品数量}}{F(K,L)}+\frac{\text{劳动力的工资率}\times\text{劳动力数量}}{F(K,L)}$$
$$=\frac{\text{资本的全部收入}}{F(K,L)}+\frac{\text{劳动力的全部收入}}{F(K,L)}$$

$=$ 劳动力的所得份额 $+$ 资本家的所得份额

柯布-道格拉斯生产函数

形式为$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$的生产函数，在$\alpha\in(0,1)$时，称为**柯布-道格拉斯生产函数**

柯布-道格拉斯生产函数具有规模收益不变特征

对所有的(K,L)，对所有的$z>0$，

$$F(zK,zL)=A(zK)^{\alpha}(zL)^{1-\alpha}=zAK^{\alpha}L^{1-\alpha}=zF(K,L)。$$

柯布-道格拉斯生产函数的边际产出

$$MPK(K,L)=\frac{\partial AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{\partial K}=\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}=\begin{cases}\alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}\\ \alpha\frac{Y}{K}\end{cases}$$

$$MPL(K,L)=\frac{\partial AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{\partial L}=(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}=\begin{cases}(1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\\ \alpha\frac{Y}{L}\end{cases}$$

柯布-道格拉斯生产函数具有边际产出递减特征

$$\frac{\partial MPK}{\partial K}(K,L)=\frac{\partial\alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}}{\partial K}=\alpha\left(\underbrace{\alpha-1}_{<0}\right)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{L}<0$$

$$\frac{\partial MPL}{\partial L}(K,L)=\frac{\partial(1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}}{\partial L}=-(1-\alpha)\alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}\frac{K}{L^{2}}<0$$

欧拉定理

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L=[\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}]K+[(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}]L$$
$$=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}=F(K,L)$$

按生产要素分配

$$\text{资本家的所得份额}=\frac{\text{资本的全部收入}}{F(K,L)}=\frac{\frac{r}{p}K}{F(K,L)}=\frac{K\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}}{F(K,L)}$$
$$=\frac{K\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}=\alpha$$

就是说，在国民收入中，资本份额为α。

$$\text{劳动力的所得份额} = \frac{\text{劳动力的全部收入}}{F(K,L)} = \frac{\frac{w}{p}L}{F(K,L)} = \frac{L\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}}{F(K,L)}$$

$$= \frac{L(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}} = 1-\alpha$$

就是说，在国民收入中，劳动力的份额为α。

消费函数（16 章）

消费函数$C(\cdot)$描述家庭消费支出规模C的决定因素与消费支出规模之间的关系。

1. **家庭可支配收入**决定家庭消费支出规模

   Y为实际 GDP；

   T为净税收= 税收$\left(\text{含各种强制性缴费}\right) -$ 转移支付

   $Y_D \equiv Y - T$为家庭可支配收入

2. **实际利率**可能决定家庭消费支出规模

   r**为实际利率。一般认为实际利率的变化对家庭消费影响有限。**凯恩斯对消费的判断“我认为，经验所揭示的主要结论，是利率对给定收入下个人的支出的短期影响是第二位的，和收入相比，不重要”。

   家庭储蓄：家庭的可支配收入中没有用于消费的部分为家庭储蓄= $Y_D - C$

   如果实际利率的变化对家庭消费影响不大，**则**对家庭储蓄影响不大。

3. **财富效应：财富增加，消费增加。**

4. **消费者对未来的信心**

5. 流动性限制

   流动性限制的定义：

消费函数

消费函数为

$$C = \bar{C} + c \times (Y - T)$$

它说的是消费支出规模决定于可支配收入$Y - T$和$\bar{C}$。

- $\bar{C}$是消费中与收入无关的项目，常被称为自发性消费支出，反映收入以外的所有因素对消费的影响。
- c是系数，反映消费对收入变化的敏感性：可支配收入增加一元钱，消费增加多少？
- Y_D上升 $\Leftrightarrow$ Y上升或T下降 $\Longrightarrow$ C上升

边际消费倾向（Marginal propensity of consumption）

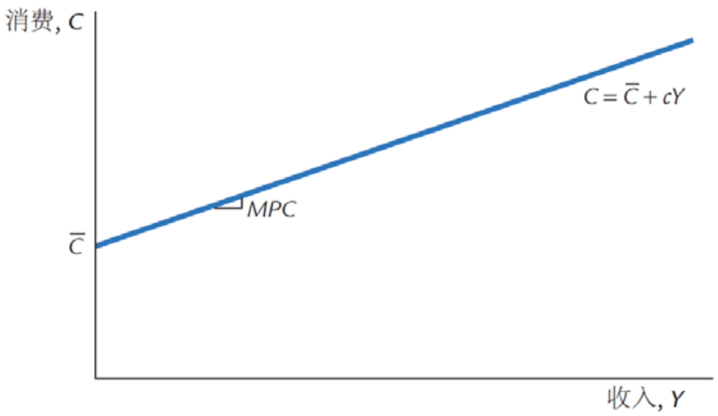
边际消费倾向为在可支配收入为Y_D时，增加1元钱的可支配收入所增加的

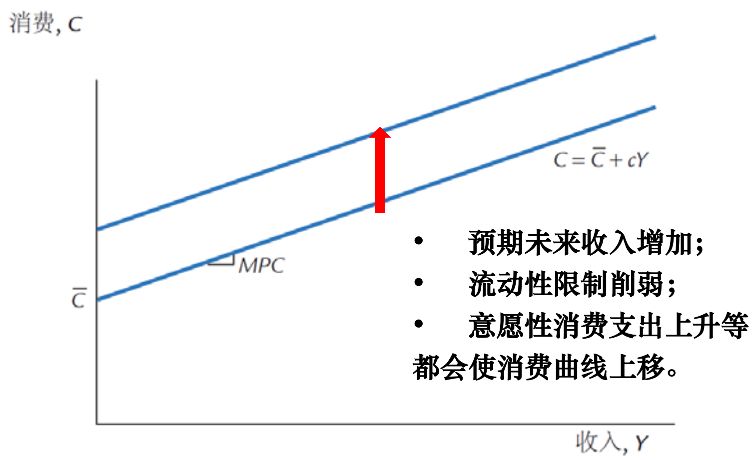
消费。

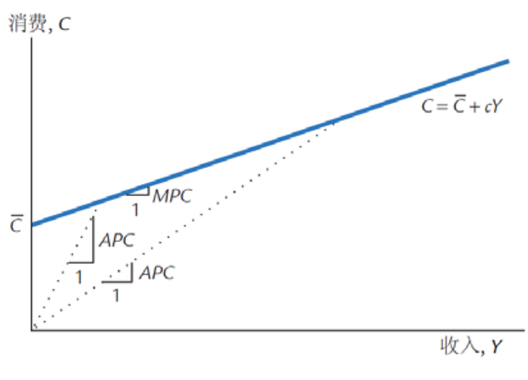
$$MPC(Y_D) = \frac{\partial C}{\partial Y_D} = c \in (0,1)$$

消费曲线

- 在其他因素不变时，可支配收入增加，消费支出上升；
- 其他因素改变，导致消费曲线向上或向下移动，即在给定的可支配收入水平上，消费得更多或更少。







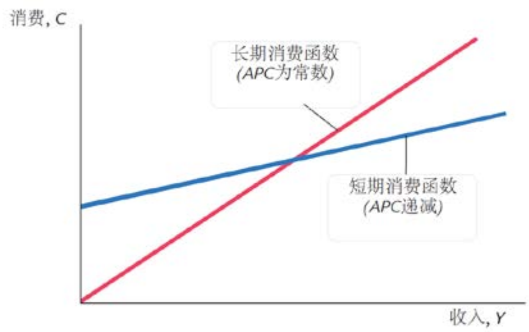
平均消费倾向（APC，average propensity to consume），即消费占收入的比

重C/Y，随收入上升而下降。就是说，

$$\frac{\mathrm{d}APC}{\mathrm{d}Y} < 0$$

对凯恩斯消费函数的经验实证检验

- 凯恩斯消费函数在短期中成立
- 凯恩斯消费函数在长期中不成立



投资函数（17 章）

投资：为在未来较长时期使用而在现在购买最终商品与服务，包含家庭购买住房和企业购买资本品。

投资函数描述投资规模的决定因素与投资规模之间的关系。

实际利率r：简单地理解，实际利率是投资资金的**机会成本**，把资金用于这一投资项目上而放弃的资金在其他用途上的收入。

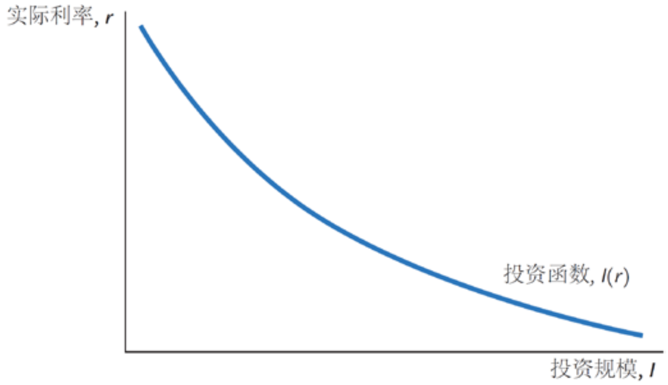
> 实际利率与投资规模反向变化。
>
> 因为$r = i - \pi$，即实际利率等于名义利率减通货膨胀率，所以，投资规模反向决定于**名义利率**，正向决定于**通货膨胀率**。

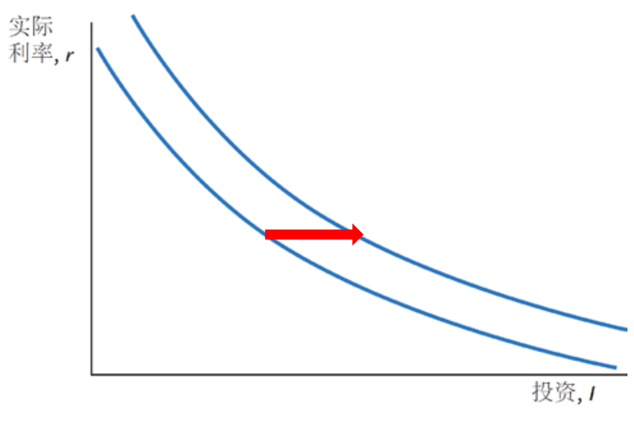
资金的可获得性：企业投资往往受困于流动性限制。在金融市场完善和流动性限制较弱时，投资规模更大。

动物精神：“我们很多的乐观的活动，取决于自发生成的乐观态度——道德的或的或经济的乐观态度——而非数学期望。我们做某件积极的事的大部分决策——其全部结果可能需要很多天才能实现——可能只能被视为是动物精神的结果——行动而非不行动的自发的冲动——而非量化收益乘以量化概率所得到的加权均值的结果。”

投资的边际收益率：增加一元钱的投资所增加的产出。投资的边际收益越高，投资越大。

投资函数（曲线）为$I(r)$。投资曲线向下倾斜，反映投资与实际利率之间的反向变化关系；其他因素的变化会使投资曲线向左或向右移动。





新古典投资模型

考察拥有资本品（生产设施等）给企业带来的收益与成本，揭示投资规模——资本品存量的增加——如何决定于资本品的边际产出、利率和税收。

推导资本品需求曲线

1 生产企业的生产函数

设$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$，$A$为技术水平。则

$$MPK(K)=\alpha A\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$$

A上升，即技术水平提高，或者L上升，即劳动力数量上升，则$MPK(K)$上升——边际产出曲线向右移动。

2 企业利润最大化决策

$F(K,L)$是企业的生产函数，K为资本存量数量，L为劳动力数量。设p是产品价格，R为资本品名义租赁价格，w为名义工资率。给定(p,R)，企业通过选择资本存量数量和劳动力数量，最大化利润:

$$\max_{K,L} pF(K,L)-RK-wL$$

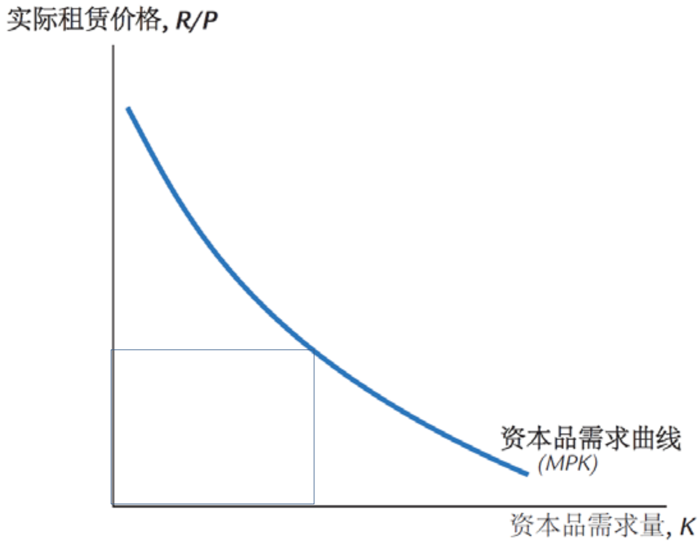
设企业所选择的资本存量为K，劳动力数量为L。它们满足一阶条件:

$$MPK(K,L)=R/p$$

$$MPL(K,L)=w/p$$

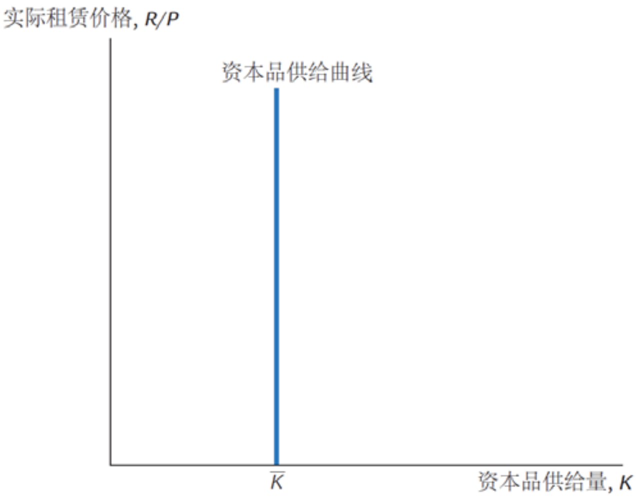
它告诉我们:

- 资本品需求量决定于实际租赁价格R/p；
- 资本品需求曲线向下倾斜：R/p下降，资本品需求量K上升。
- 资本品的边际产出曲线即是资本品的需求曲线。

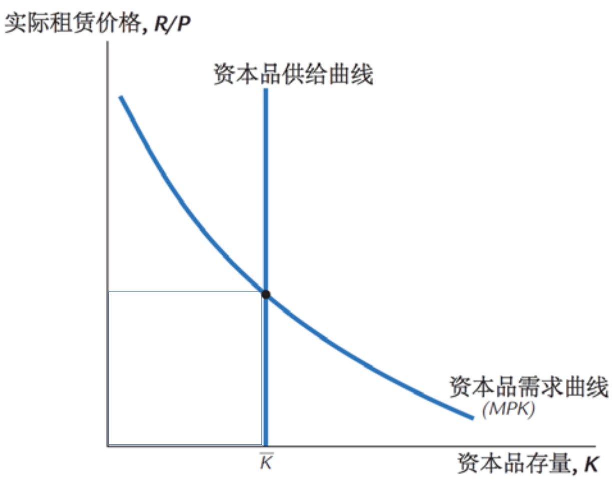


资本品需求曲线

3 资本品供给曲线



4 均衡实际租赁价格



把资本品存量$\overline{K}$代入到资本品需求曲线中，得到均衡实际租赁价格：

$$MPK(\overline{K},L) = R/p$$

技术进步或劳动力数量上升，通过使资本品需求曲线向右移动，增加均衡实际租赁价格；资本品供给量减少，即供给曲线向左移动，增加均衡实际租赁价格。

租赁企业

租赁企业的收入：以R/p的均衡实际租赁价格出租资本品，得到收入R/p。

租赁企业的成本：

(1) 设资本品的价格为p_k，贷款利率为i。单位时间里的利息成本为$i \times p_k$。

(2) 设在单位时间里，资本品增值Δp_k。

(3) 设单位时间里的折旧率为δ，则折旧为$\delta \times \Delta p_k$。

则资本品使用成本为:

$$\begin{aligned}&i \times p_k - \Delta p_k + \delta \times \Delta p_k\\&= p_k\left(i - \frac{\Delta p_k}{p_k} + \delta\right)\\&= p_k(i - \pi + \delta)\\&= p_k(r + \delta)\end{aligned}$$

实际使用成本为

$$\frac{p_k}{p}(r + \delta)$$

租赁企业的利润为

$$\frac{R}{p} - \frac{p_k}{p}(r + \delta) = MPK(\bar{K}) - \frac{p_k}{p}(r + \delta)$$

如果

- $\frac{R}{p} - \frac{p_k}{p}(r + \delta) > 0$，就增加资本存量，

- $\frac{R}{p} - \frac{p_k}{p}(r + \delta) < 0$，就减少资本存量，

于是，

$$\Delta K = I_n\left[MPK(\bar{K}) - \frac{p_k}{p}(r + \delta)\right]$$

I_n为净投资函数，ΔK为所增加的资本品存量。于是，

$$I = I_n\left[MPK(\bar{K}) - \frac{p_k}{p}(r + \delta)\right] + \delta K$$

即投资规模决定于资本品的边际产出、实际利率、投资资金的可获得性。